Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по квантовой теории
Андрею Владимировичу Толоконникову

А.В. Желающим я предлагаю пойти и задолбить курс гильбертова пространства…

Дисклеймер: данная методичка пишется уже тогда, когда автор находится на 8-м семестре. Посему ему всё уже очевидно.
Хоть данная методичка и носит номер 1,5, если вы поймёте сказанное тут до прочтения второй – вы потрясающи. Но если нет – ничего страшного. Тут содержится некая «ломка сознания», к которой надо прийти самому. Для этого у вас есть весь 6-й семестр.

В координатных квантах (т.е. на введении в кванты и атомке) ВФ зависти только от координат (и времени). В общих квантах ВФ может быть функцией, например, импульсов (импульсное представление) или энергий (энергетическое представление).
Напомню, что это такое.
Импульсное представление:

$$\Psi(p_x, p_y, p_z, t)$$

И квадрат пси уже будет обозначать не вероятность найти частицу в точке с координатами (x, y, z), но ЛЮБЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ ИМПУЛЬСА, а вероятность того, что частица имеет проекции импульса p_x, p_y, p_z, а вот координаты уже какие придётся.
Тем самым, помимо традиционного пространства с x, y, z, рассматривают ещё импульсное пространство с p_x, p_y, p_z.

Аналогично энергетическое представление

$$\Psi(E, t)$$

Там квадрат ВФ будет обозначать плотность вероятности найти частицу где угодно и с каким угодно импульсом, но именно с энергией E.

Давайте рассмотрим пример - гармонический осциллятор вот в таком вот состоянии:

$$\Psi = \frac{3}{5}\varphi_0(x) + \frac{4}{5}\varphi_1(x)$$

Где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ – собственные функции гамильтониана, которые были получены на введении в кванты и/или атомке.
В координатном представлении это что такое?

$$\Psi(x) = \frac{3}{5}N_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) + \frac{4}{5} * N_1 * 2x * \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

$$N_0, N_1 - \text{ нормировочные коэфы}$$

Напомню, что $|\Psi(x)|^2$ – вероятность измерить в данном состоянии координату x.
А какое у этой ВФ энергетическое представление?

Давайте его определим так: $|\Psi(E)|^2$ – вероятность измерить в данном состоянии координату E – по аналогии с координатным представлением.
Это на самом деле нечто такое:

Энергия	$\frac{h\omega}{2}$	$\frac{3h\omega}{2}$	$\frac{5h\omega}{2}$	$\frac{7h\omega}{2}$
значение ВФ для данной энергии	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0

и так далее.
Строго говоря, это даже не совсем функция – а бесконечный одномерный массив чисел! Ну, если совсем припрёт, можно из этого массива сделать функцию:

$$\Psi(E) = \frac{3}{5}б(0) + \frac{4}{5}б(1)$$

А у нас ещё есть импульсное представление! Ну, т.к. импульс равен $\sqrt{2mE}$, то естественным образом получаем

Импульс	$\sqrt{mh\omega}$	$\sqrt{3mh\omega}$	$\sqrt{5mh\omega}$	$\sqrt{7mh\omega}$
значение ВФ для данного импульса	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0

$$\Psi(p) = \frac{3}{5}б(0) + \frac{4}{5}б(1)$$

Таким образом мы получили три разных по форме и содержанию представления одного состояния – в виде функции x, E и p. И в виде функции, и в виде массива (вектора) – ну по полной ☺
Но состояние одно!!!

Вот частица прямо сейчас находится в этом состоянии. Её всё равно, как Вася Пупкин будет её состояние описывать. Васе Пупкину нравится координатное направление, Пете Иванову – энергетическое, но описывать будут одно состояние.

Итак, у нас есть термины:
состояние Ψ – инвариантно!
волновая функция – а она нам нужна служит для описания состояния. Может быть $\Psi(x), \Psi(p), \Psi(E)$ - в зависимости от того, что нас интересует.

Множество всех возможных состояний в данном потенциале называется ***гильбертовым пространством.***
Это такой «мешок» различных состояний:

Примеры состояний из мешка:
частица имеет импульс p – это состояние
частица с вероятностью 40% имеет координату x_1, а с вероятностью 60% - другую-то x_2 - это состояние
частица имеет энергию такую-то – это состояние
Кстати, а как записать второе состояние? А вот так:

$$\Psi(x) = \sqrt{0{,}4}\delta(x - x_1) + \sqrt{0{,}6}\delta(x - x_2)$$

Можно дать и другую, математическую интерпретацию гильбертовому пространству.
Давайте искусственно переведём все состояния в координатные ВФ. Получим некий набор функций. Так что можно сказать, что он и есть гильбертово пространство.
Он у вас уже был на ММФ, обозначался L, кажется. Вы тогда его называли пространством Лебега.
Правда, среди этих функций есть обобщённые. Это вынужденная мера, как вы уже поняли - на случай дискретного спектра, наподобие того, что был выше:

$$\Psi(x) = \sqrt{0{,}4}\delta(x - x_1) + \sqrt{0{,}6}\delta(x - x_2)$$

Теперь мы поняли, о чём на самом деле сказка о царевне-лягушке. Она о теории представлений. Душа – состояние, а тело – представление ☺

Проведём аналогию со СТО – тензоры есть инварианты СК, а в СК они лишь приобретают конкретный вид в виде столбцов, матриц и т.д. Здесь то же самое. Абстрактно состояние – это всего лишь бра $|\Psi >$. Хочется большей конкретики? Извольте выбрать представление – координатное, импульсное, энергетическое.

Кстати, не только состояния являются инвариантными. Инвариантными являются также скалярные произведения:

$$< \Psi_1|\Psi_2 >$$

Это числа. Возможно, комплексные. И они одинаковые во всех представлениях. Т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x)\,\Psi_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(p)\,\Psi_2(p)dp = \sum_E \Psi_1(E)\Psi_2(E)$$

(я написал для энергий сумму, а для импульсов интеграл. На самом деле это не имеет значения, выбор интеграла или суммы в каждом случае индивидуален)
Продолжая аналогию с царевной-лягушкой – скалярное произведение Ивана с царевной не зависит от представления, в котором они находятся ☺

Это всё было в 1D - а что изменится в 3D? Там возникает одно отличие: для того, чтобы описать состояние, нужно три числа. Три числа для трёх операторов – единственно, что важно, чтобы операторы друг с другой коммутировали.
Частица имеет координаты x, y, z - ОК, т.к. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ коммутируют.
Частица имеет координаты x, y и импульс p_z - ОК, т.к. $\hat{x}, \hat{y}, \widehat{p_z}$ коммутируют.
Частица имеет энергию Е, импульсы p_y, p_z - ОК, т.к. $\hat{E}, \widehat{p_y}, \widehat{p_z}$ коммутируют.
Частица имеет энергию Е, координату y, p_z – не ОК. Потому что $\hat{H} = \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} + \frac{\widehat{p_y}^2}{2m} + \frac{\widehat{p_z}^2}{2m}$, а $\hat{x}$ и $\widehat{p_x}$ не коммутируют.